

Ugemo



ULUSAL GENÇ
MATEMATİKÇİLER
OLİMPİYATI

10.
SINIF

FİNAL SINAVI

Ulusal Genç Matematikçiler Olimpiyatı

- Sınav süresi 120 dakikadır.
- Kitapçıkta 24 soru bulunmaktadır.
- 4 yanlış 1 doğruyu götürmektedir.

Adı Soyadı :

Okulu :

Sınıfı :

T.C. No. :

1. $(3 + \sqrt{5})^{10} + (3 - \sqrt{5})^{10}$

toplamı aşağıdakilerden hangisine tam bölünür?

- A) 961 B) 1024 C) 1296 D) 2040 E) 2048

2. 5 elemanlı X kümesinin üç alt kümesi A, B ve C olsun.

A kümesi B nin alt kümesi ve B kümesi C nin özalt kümesi olacak şekilde kaç (A, B, C) sıralı üçlüsü vardır?

- A) 980 B) 963 C) 860 D) 781 E) 961

3. $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10, 11\}$ kümesi verilsin.

$a, b \in A$ ve $|a - b| \leq 5$ olacak şekilde kaç tane sıralı (a, b) ikilisi vardır?

- A) 91 B) 89 C) 78 D) 64 E) Hiçbiri

4. ABC üçgeninde $E \in [AC]$, $F \in [AB]$ ve $BE \cap CF = \{P\}$ dir.

$\text{Alan}(\widehat{BPF}) = 4$, $\text{Alan}(\widehat{BPC}) = 8$ ve $\text{Alan}(\widehat{CPE}) = 13$ olduğuna göre, **Alan(AFPE) kaçtır?**

- A) 161 B) 143 C) 132 D) 124 E) Hiçbiri

5. $2(x^2 + 1)(y^2 + 1) = (x + 1)(y + 1)(xy + 1)$

denklemini sağlayan kaç (x, y) reel (gerçek) çözümü vardır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6. n bir pozitif tam sayıdır.

$(a_n) = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n^2 - 1}}$ dizisinde $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{49} = a + b\sqrt{2}$ olduğuna göre, **$a + b$ toplamı kaçtır?**

- A) 15 B) 14 C) 10 D) 8 E) 7

7. $[OX]$ ve $[OY]$ ışınlarının oluşturduğu açının ölçüsü 60° dir. Merkezi XOY açısının iç bölgesinde olan ve $[OY]$ ışınına A noktasında teğet olan çemberin yarıçapı 8 cm ve $|OA| = 20$ cm dir.

Çemberin üzerindeki bir P noktasından $[OX]$ ve $[OY]$ ışınlarına çizilen dikme ayakları sırasıyla Q ve R ise $|PQ| + |PR|$ toplamının alabileceği en küçük değer kaç cm dir?

- A) $10\sqrt{3} - 1$ B) $9\sqrt{3} - 2$ C) $10\sqrt{3} - 4$
D) $12\sqrt{3} - 4$ E) Hiçbiri

8. $x \geq 5$, $y \geq 3$ ve $x + y = 17$ ise

$$S = \sqrt{x^2 - 25} + \sqrt{y^2 - 9}$$

ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

- A) 9 B) 12 C) 13 D) 15 E) Hiçbiri

9. $x^2 - 6x + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $n \in \mathbb{N}$ ve $S_n = x_1^n + x_2^n$ olmak üzere,

$$S_2 \cdot S_4 - S_3^2$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 216 B) 224 C) 296 D) 324 E) 360

10. Pozitif terimli bir (a_n) dizisinde,

$$a_1 = 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için}$$

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n} = \frac{(n+1) \cdot \sqrt{a_n}}{2}$$

eşitliği sağlanıyor.

Buna göre,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{45}$$

toplamının son üç basamağı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 395

B) 406

C) 415

D) 575

E) 441

11. $M = \sqrt[3]{100 + \sqrt{9999}} + \sqrt[3]{100 - \sqrt{9999}} + 1$ olduğuna göre,

$$M^3 - 3M^2$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 202

B) 200

C) 198

D) 196

E) 192

12. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 gerçel sayıları,

$$2 \cdot x_1 = x_5^2 - 23$$

$$4 \cdot x_2 = x_1^2 + 7$$

$$6 \cdot x_3 = x_2^2 + 14$$

$$8 \cdot x_4 = x_3^2 + 23$$

$$10 \cdot x_5 = x_4^2 + 34$$

eşitliklerini sağladığına göre, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ toplamı kaçtır?

A) 10

B) 12

C) 15

D) 18

E) 19

13. $x \neq y$ ve $x \cdot y = 2$ olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$\frac{[(x+y)^2 - 6] \cdot [(x-y)^2 + 8]}{(x-y)^2} \geq C$$

koşulunu sağlayan en büyük C doğal sayısının rakamlarının toplamı kaçtır?

A) 10

B) 9

C) 8

D) 7

E) 6

14. $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

kümesinin birbirinden farklı ve biri diğerini içeren iki alt kümesi kaç farklı biçimde seçilebilir?

A) 6561

B) 6442

C) 6305

D) 6105

E) 5661

15. $x, y \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$x^2 - 2y = 1221$$

denkleminin kaç (x, y) çözümü vardır?

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

16. a, b, c gerçekte sayılar ve her $n \geq 0$ için $S_n = a^n + b^n + c^n$ olsun.

$S_1 = 2$, $S_2 = 6$ ve $S_3 = 14$ ise

$$|S_{2025}^2 - S_{2024} \cdot S_{2026}|$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 8

B) 4

C) 6

D) 16

E) 18

17. Bir dik üçgenin hipotenüse ait dış teğet çemberinin yarıçapı 48 olduğuna göre, **bu üçgenin çevresinin uzunluğu kaçtır?**

A) 54 B) 72 C) 84 D) 96 E) Hiçbiri

18. $\sqrt{\frac{4n+5}{n+7}}$

ifadesinin bir rasyonel sayı olmasını sağlayan n doğal sayısının rakamları toplamı kaçtır?

A) 13 B) 11 C) 9 D) 8 E) Hiçbiri

19. A açısının ölçüsü 60° olan ABC üçgeninde içteğet çemberin [AB] ve [AC] ye değme noktaları sırasıyla M ve P olsun. [BC] nin orta noktası D ve D den MP doğrusuna çizilen dikme ayağı Q olsun. $|BC| = 8\sqrt{2}$ olduğuna göre, $|DQ|$ kaçtır?

A) $2\sqrt{6}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{6}$ D) $4\sqrt{6}$ E) Hiçbiri

20. Bir üçgenin içinde 2025 nokta alınıyor ve herbiri sırasıyla içerisinde bulundukları en küçük üçgenin köşelerine birleştiriliyor.

Son durumda elde edilen küçük üçgenlerin sayısı kaçtır?

A) 2081 B) 3037 C) 4050 D) 4051 E) Hiçbiri

21. n tane iki basamaklı tek sayı nasıl alınırsa alınsın, bunların arasında birler basamakları kendi aralarında birbirinden farklı ve onlar basamakları da kendi aralarında birbirinden farklı olacak şekilde 4 tanesi seçilebiliyorsa, n en az kaçtır?

A) 26

B) 27

C) 28

D) 29

E) Hiçbiri

22. $x \neq 0$ ve $x \neq 1$ olmak üzere,

f fonksiyonu $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$ eşitliğini sağladığına göre, $f(2)$ değeri kaçtır?

A) $\frac{9}{2}$

B) $\frac{7}{4}$

C) $\frac{7}{2}$

D) $\frac{5}{4}$

E) $\frac{1}{4}$

23. $a^3 + 2a^2b + 2b^3 = a$ ve $2a^2 + 6ab + 3b^2 = 1$

eşitliklerini sağlayan kaç (a, b) gerçekte sayı ikilisi vardır?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) Hiçbiri

24. ABC üçgeni içinde bir P noktası alınıyor. $AP \cap BC = \{A_1\}$, $BP \cap AC = \{B_1\}$, $CP \cap AB = \{C_1\}$ ve

$$\frac{|AP|}{|PA_1|} + \frac{|BP|}{|PB_1|} + \frac{|CP|}{|PC_1|} = 2025 \text{ ise}$$

$$\frac{|AP|}{|PA_1|} \cdot \frac{|BP|}{|PB_1|} \cdot \frac{|CP|}{|PC_1|}$$

çarpımının değeri kaçtır?

- A) 2026 B) 2027 C) 2028 D) 2029 E) Hiçbiri

